Визначення координат окремих точок знімального обґрунтування

©Викладач: Петрова О.М.

План лекцій

1. **Мета та методи визначення координат окремих точок знімального обґрунтування**

а) Передача координат з вершини знака на землю.

б) Пряма засічка.

в) Обернена засічка.

г) Лінійна засічка.

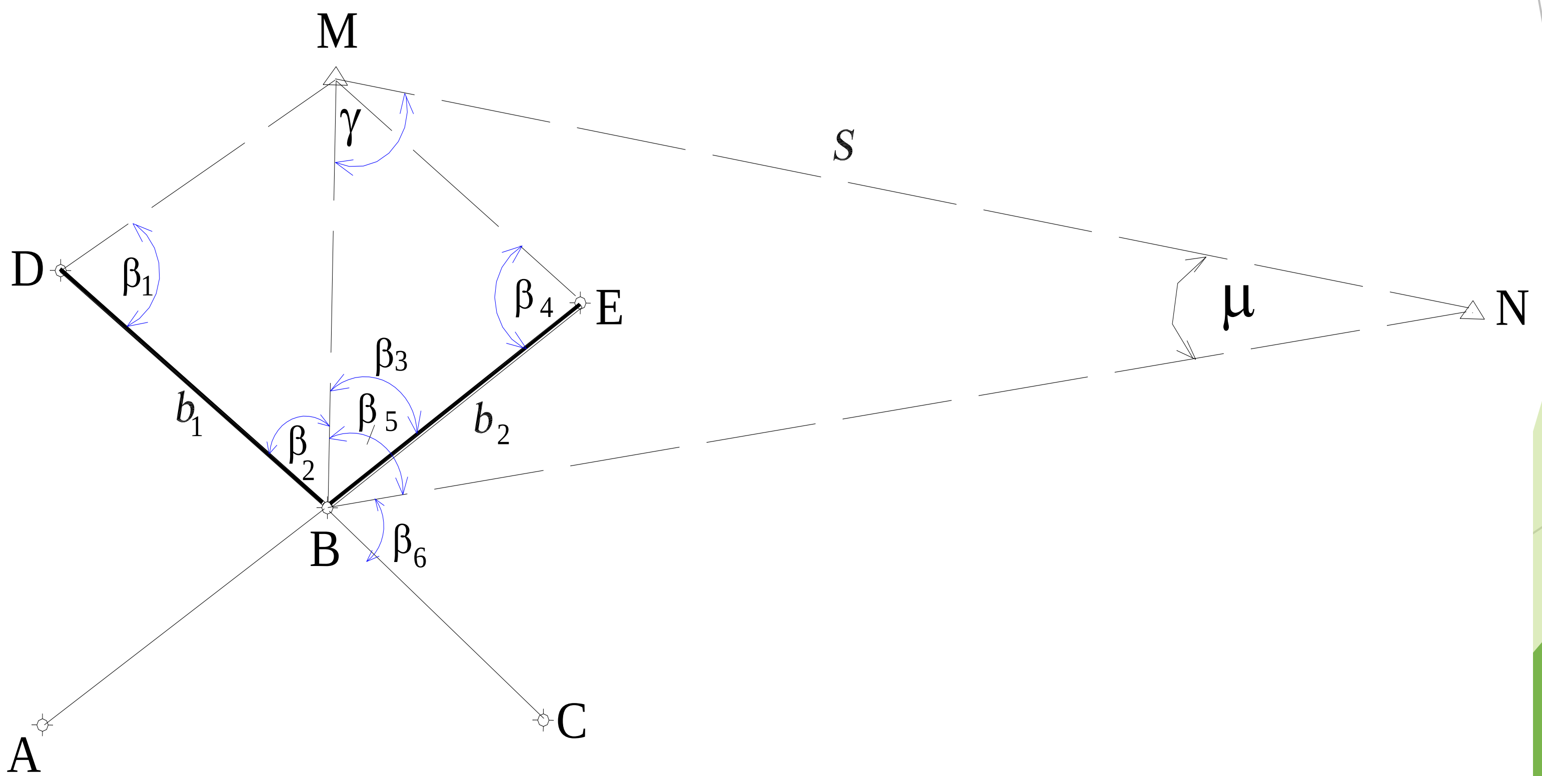
2. **Прив’язування пунктів геодезичних мереж та способи відшукування пунктів**

а) Прив’язування до постійних об’єктів місцевості та далеких предметів.

Передача координат з вершини знака на землю

Пункти опорної сітки інколи бувають розташовані на недоступних (високих) точках. Для прив'язки точки ***В*** хода ***АВС*** знімальної основи до опорної точки ***М***, розташованої наверху споруди, проводиться вимірювання кутів і ліній.

Біля опорної точки ***М*** намічають точку ***В*** у такому місці, щоб було видно пункт ***М*** та опорна точка ***N***.



При точці ***B*** вимірюють два базиси ***BD*** = b_1 та ***BE*** = b_2. Для отримання координат точки ***B*** треба знати довжину лінії ***MB*** = d та кут ***NMB*** = γ. При точках ***D***, ***B***, ***E*** вимірюють горизонтальні кути β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, β_6.

З трикутників ***BDM*** та ***BEM*** по виміряних кутам та базисам можна обчислити по теоремі синусів два значення довжини лінії ***BM*** = d.

$$d_{BM} = \frac{b_1 \times \sin\beta_1}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} = \frac{b_1 \times \sin\beta_4}{\sin(\beta_3 + \beta_4)}$$

З цих результатів беруть середнє значення. Кут γ вираховується з трикутника ***BMN***, в якому довжина лінії ***MN*** = s. Дирекційний кут α_{MN} - вираховуємо по оберненій геодезичній задачі. По теоремі синусів кут μ при точці ***N*** вираховується по формулі:

$$\sin\mu = \frac{d \times \sin\beta_5}{S_{MN}} \qquad \gamma = 180^\circ - (\mu + \beta_5)$$

Дирекційний кут лінії $\alpha_{MB} = \alpha_{MN} + \gamma$

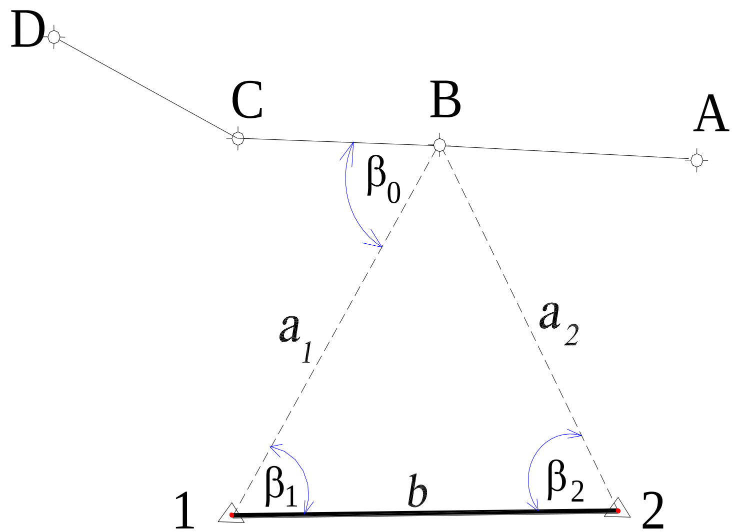
Координати точки ***B*** вираховують за формулами:

$$X_B = X_M + d \times \cos\alpha_{MB} \qquad Y_B = Y_M + d \times \sin\alpha_{MB}$$

Для контролю координат точки ***B*** потрібно двічі вирахувати дирекційний кут лінії по формулі: $\alpha_{BN} = \alpha_{MB} + 180^\circ + \beta_5$

та по формулі $tg\,\alpha_{BN} = \dfrac{Y_N - Y_B}{X_N - X_B}$

<u>Прив'язка точки хода методом прямої засічки</u> – якщо потрібно прив'язати хід ***ABCD*** до точок опори ***1*** і ***2***, координати яких x_1, y_1 та x_2, y_2 відомі. Задача вирішиться, якщо знайдемо координати точки ***B*** та α_{BC}.



Якщо між точками ***1*** і ***2*** є видимість, то вимірюємо кути β_1 і β_2. Координати точки ***B*** визначають з трикутника ***1B2*** за теоремою синусів, за стороною ***b*** та кутами β_1 і β_2, визначаємо лінії ***a₂*** та ***a₁***

$$a_1 = \frac{b \times \sin\beta_1}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} \qquad a_2 = \frac{b \times \sin\beta_2}{\sin(\beta_1 + \beta_2)}$$

Дирекційні кути лінії ***2B*** і ***1B*** будуть отримані з формул:

$$\alpha_{2-B} = \alpha_{2-1} - \beta_2 \qquad \alpha_{1-B} = \alpha_{1-2} + \beta_1$$

Прирости координат лінії ***1B*** і ***2B*** будуть такі:

$$\Delta x_{1-B} = a_2 \times \cos\alpha_{1-B} \qquad \Delta y_{1-B} = a_2 \times \sin\alpha_{1-B}$$

$$\Delta x_{2-B} = a_1 \times \cos\alpha_{2-B} \qquad \Delta y_{2-B} = a_1 \times \sin\alpha_{2-B}$$

Координати точки ***B*** будуть отримані двічі:

1) $X_B = X_1 + \Delta x_{1-B}$ $\qquad Y_B = Y_1 + \Delta y_{1-B}$

2) $X'_B = X_2 + \Delta x_{2-B}$ $\qquad Y'_B = Y_2 + \Delta y_{2-B}$

Розходження в координатах можуть бути за рахунок округлення під час розрахунків:

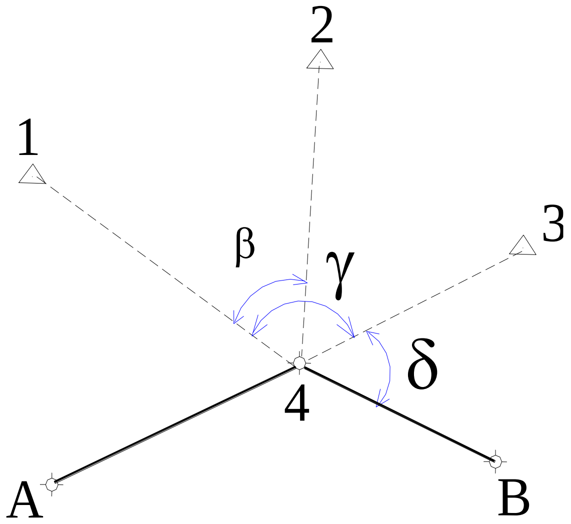
$$X_B = \frac{X_B + X'_B}{2} \qquad Y_B = \frac{Y_B + Y'_B}{2}$$

Передачу дирекційного кута на сторону ***BC*** визначаємо через кут β_0

$$\alpha_{BC} = \alpha_{1-B} + 180^\circ + \beta_0$$

Для отримання надійності результату визначаємо дирекційний кут лінії ***BA***.

Прив'язка точки методом зворотної засічки (задача Потенота) – полягає в тому, що за координатами 3-х опорних точок ***1, 2, 3*** визначають координати точки ***4*** для прив'язки ходу ***А4В*** до опорних сіток. Для вирішення цієї задачі при точки ***4*** вимірюють горизонтальні кути β і γ, а для вирахування дирекційного кута лінії ***4В*** вимірюють кут δ.



Для розрахунку координат x_4, y_4 за координатами опорних точок $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ використовують формули:

- дирекційний кут $\alpha_{1\text{-}4}$ лінії ***1-4*** вираховують за формулою:

$$tg\alpha_{1-4} = \frac{(X_2 - X_3) + (Y_1 - Y_2) \times ctg\beta + (Y_3 - Y_1) \times ctg\gamma}{(Y_3 - Y_2) + (X_1 - X_2) \times ctg\beta + (X_3 - X_1) \times ctg\gamma} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- дирекційні кути інших ліній вираховують за формулами:

$$\alpha_{2-4} = \alpha_{1-4} + \beta \qquad \alpha_{3-4} = \alpha_{1-4} + \gamma$$

прирости абсцис між точками ***1*** і ***4*** та ***2*** і ***4*** визначаємо за формулами:

$$X_4 - X_1 = \Delta x_{1-4} = \frac{(X_1 - X_2) \times ctg\alpha_{2-4} - (Y_1 - Y_2)}{tg\alpha_{1-4} - tg\alpha_{2-4}} = \frac{B'}{A}$$

$$X_4 - X_2 = \Delta x_{2-4} = \frac{(X_1 - X_2) \times ctg\alpha_{1-4} - (Y_1 - Y_2)}{tg\alpha_{1-4} - tg\alpha_{2-4}} = \frac{B}{A}$$

- координати точки ***4***;

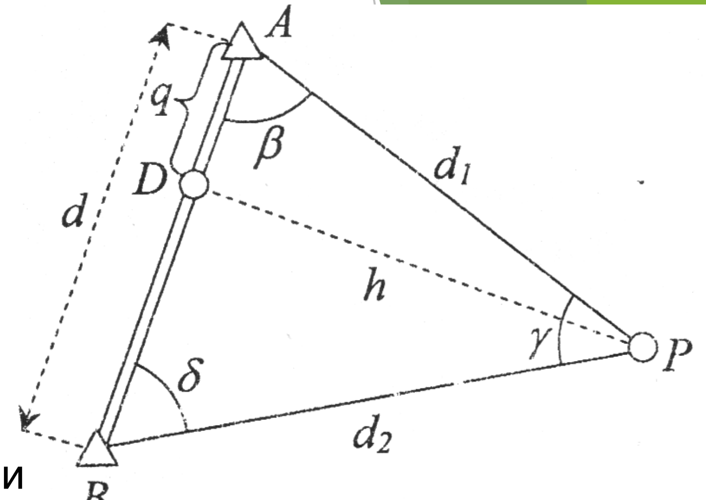
$$X_4 = X_1 + \Delta x_{1-4} = X_2 + \Delta x_{2-4}$$

$$Y_4 = (Y_1 + \Delta x_{1-4} \times tg\alpha_{1-4}) = Y_2 + \Delta x_{2-4} \times tg\alpha_{2-4}$$

- дирекційний кут лінії ***4В*** хода ***А4В*** вираховують за формулою:

$$\alpha_{4-B} = \alpha_{1-4} + 180° + \gamma + \delta = \alpha_{3-4} + 180° + \delta$$

<u>Лінійну геодезичну засічку</u> застосовують для визначення координат точки ***P*** за координатами двох вихідних (відомих) пунктів ***A*** і ***B*** та двома виміряними віддалями d_1 та d_2 від шуканої точки до вихідних пунктів



Розв'язавши обернену геодезичну задачу, за координатами точок $A(X_A,У_A)$ та $B(X_B,Y_B)$, визначимо довжину сторони $AB = d$ та її дирекційний кут α_{A-B}

Тоді в трикутнику ***ABP*** будуть відомі усі три сторони. Трикутник розв'язується.

За формулами тригонометричних функцій косинусів (або тангенсів) половинних кутів обчислимо кути трикутника:

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-d_2)}{dd_1}} \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-d\ \ )}{d_1 d_2}} \qquad \cos\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-d_1)}{d\ \ d_2}}$$

де $p = \dfrac{d + d_1 + d_2}{2}$ – півпериметр трикутника *ABP*.

Знаючи всі шість елементів трикутника ***ABP***, за формулами прямої та оберненої засічок можна обчислити координати точки ***P*** два рази: за координатами точки ***A*** та координатами точки ***B***. Контролюють обчислення за співпадінням координат. Проте, якщо зроблено похибку під час польового вимірювання лінії d_1 або d_2, то ця похибка не виявиться. Тому для контролю польових вимірювань потрібно мати не дві, а три вихідних точки та виміряти ще одну, третю лінію.

Розв'язок може бути виконаний і без обчислення кутів трикутника ***ABP*** [8]. Покажемо це. Знайдемо основу перпендикуляра точки ***P*** на лінії ***AB****.* Залежно від того, тупий чи гострий кут β, отримаємо основу перпендикуляра (точку ***D****)* на продовженні лінії ***BA*** або на лінії ***AB****.*

Відрізок *q* – проєкція d_1 на *d;* $q = d_1 \cos\beta$

Кут β поки що невідомий.

Якщо кут β гострий, матимемо: $d_2^{\,2} = d^2 + d_1^{\,2} - 2dq$

Якщо кут β тупий, то : $d_2^{\,2} = d^2 + d_2^{\,2} - 2dq$

В нашому випадку β гострий кут. Тому маємо: $q = \dfrac{d^2 + d_1^{\,2} - d_2^{\,2}}{2d}$

З прямокутного трикутника ***APD*** можемо записати: $h = \sqrt{d_1^{\,2} - q^2} = d_1 \sin\beta$

Оскільки $h = d_1 \sin\beta$, то $\beta = \arcsin\dfrac{h}{d_1}$

Дирекційний кут α_{A-B} буде дорівнювати: $\alpha_{A-P} = \alpha_{A-B} \pm \beta$

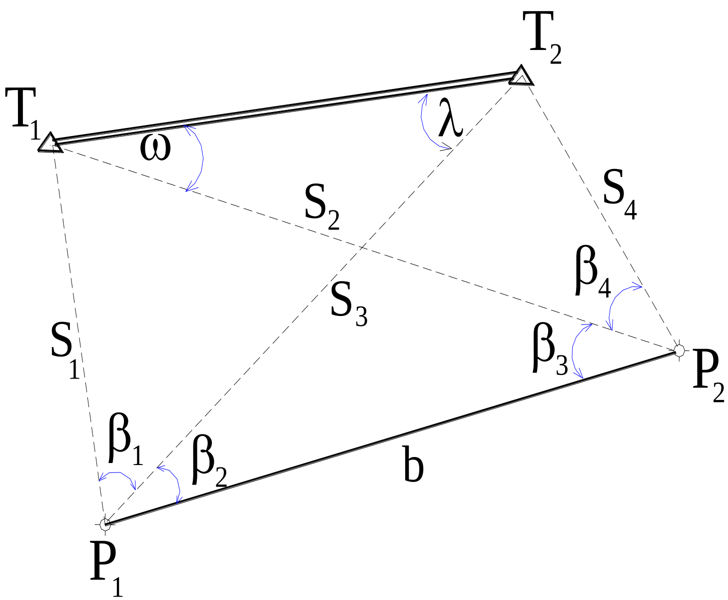
Знак кута β вибирається залежно від того, ліворуч чи праворуч розташована точка ***P*** відносно лінії ***AB***. Праворуч $"+\beta"$, ліворуч $"-\beta"$

В нашому випадку – ліворуч.

Прирости координат точки ***P*** відносно пункту ***A***, координати якого відомі, обчислимо за формулами:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= d_1 \cos\alpha_{A-P} \\ \Delta y &= d_1 \sin\alpha_{A-P} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} X_p &= X_A + \Delta x \\ Y_p &= Y_A + \Delta y \end{aligned}\right\}$$

Визначення координат двох точок за відомими координатами двох інших точок (задача Гензена)



Припустимо, координати точок полігонометрії P_1 та P_2 необхідно одночасно визначити відносно координат пунктів T_1 та T_2 тріангуляції. Існує багато розв'язків такої задачі. Одним з найдоцільніших серед них є розв'язок, який можна назвати **методом умовного базису**.

Суть цього методу полягає в тому, що довжину лінії P_1-P_2 умовно приймають за одиницю. Потім, за виміряними кутами $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ та, вважаючи лінію P_1-P_2 відомою, рівною b, розв'язанням трикутників $T_1P_2P_1$ та $T_2P_2P_1$ визначають сторони S'_1, S'_2, S'_3, S'_4.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{S_1}{\sin\beta_3} = \frac{b}{\sin\left[180^\circ - \left(\beta_1+\beta_2+\beta_3\right)\right]};\ \frac{S_2}{\sin(\beta_3+\beta_4)} = \frac{b}{\sin\left[180^\circ - \left(\beta_2+\beta_3+\beta_4\right)\right]}\\
&\frac{S_3}{\sin(\beta_1+\beta_2)} = \frac{b}{\sin\left[180^\circ - \left(\beta_1+\beta_2+\beta_3\right)\right]};\ \frac{S_2}{\sin(\beta_3+\beta_4)} = \frac{b}{\sin\left[180^\circ - \left(\beta_2+\beta_3+\beta_4\right)\right]}
\end{aligned}\right\}$$

Оскільки в кожному з двох трикутників $T_1T_2P_1$ та $T_1T_2P_2$ відомі дві сторони та кути між ними β_1 і β_4, то ці трикутники розв'язуються.

Можна знайти третю сторону та два інших кути. Знайдемо також кути φ та λ.

Тепер у нас є можливість два рази, з контролем, знайти довжину b′ в цій умовній одиниці довжини. Позначимо цю умовну довжину b′. З трикутників $T_1T_2P_1$ та $T_1T_2P_2$, відповідно маємо:

$$\frac{b'}{\sin\beta_1}=\frac{S'}{\sin\lambda};\frac{b'}{\sin\beta_4}=\frac{S'_4}{\sin\varphi}.$$

Отже, дійсно b′ визначено з контролем (два рази). Два результати b′ повинні сходитися в межах точності обчислень. Але фактичну довжину цієї лінії b та її дирекційний кут ми можемо визначити за координатами пунктів T_1 та T_2.

З відношення b до b′ ми знайдемо дійсну довжину лінії P_1-P_2. Позначимо цю довжину S:

$$S=\frac{b}{b'}.$$

Тепер у нас є всі необхідні дані, щоб знайти дирекційні кути і фактичну довжину всіх чотирьох ліній:

$$S_1=S'_1\cdot S;S_2=S'_2\cdot S;S_3=S'_3\cdot S;S_4=S'_4\cdot S.$$

Залишається за довжинами ліній та дирекційними кутами визначити прирости координат, а потім і координати точок P_1 та P_2. Координати кожної з цих точок будуть обчислені два рази, що і буде їх кінцевим контролем.

Розглянутий спосіб є дуже простим та природним. Найвигіднішим випадком визначення координат двох точок буде той, коли форма, створена двома даними та двома шуканими точками, близька до квадрату. Потрібно уникати дуже гострих кутів у чотирикутнику.

Прив’язування пунктів полігонометрії до постійних об’єктів місцевості. Відшукування полігонометричних пунктів

Від прокладання полігонометричної мережі до її використання для топознімання може пройти декілька років, і як би фундаментально не закріплювались пункти, все ж знайти їх на місцевості буває дуже важко. Головна мета прив’язування пунктів до постійних предметів, як вже відзначалося, забезпечити їх знаходження. Способи такого прив’язування різноманітні. Суть їх стане зрозуміла після ознайомлення з типовими прикладами прив’язування.

Прив’язування до далеких предметів

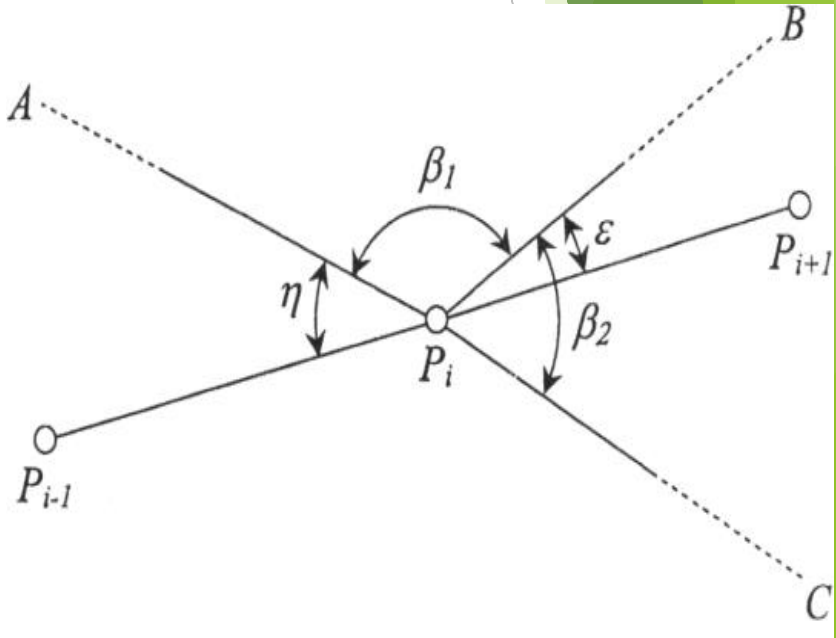
У малонаселених районах близькі стійкі предмети місцевості просто відсутні. Одночасно часто трапляються випадки, коли з полігонометричних пунктів видно далекі предмети місцевості: поодинокі дерева, перехрестя доріг, чіткий край лісу тощо. У цьому випадку слід виміряти кути $\beta1$ та $\beta2$, як це робиться в задачі Потенота, та, крім того, виміряти кути η і ε для орієнтування сторін ходу. Під час пошуку пункту *Pi* слід встановити теодоліт послідовно в такі точки, щоб виміряні кути наближалися до відомих $\beta1$ та $\beta2$.

Контролем будуть кути η та ε.

Досить корисно для такого прив’язування використовувати метод створів.

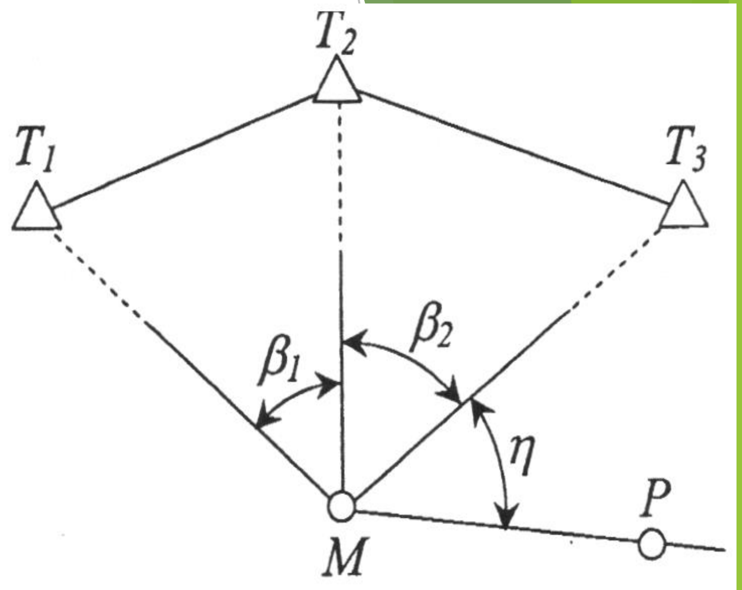
Під час прив’язування необхідно дотримуватися одного загального правила: кількість елементів прив’язування має бути необхідною і достатньою для того, щоб поновити хоча б два сусідніх пункти полігонометричного ходу.

Зрозуміло, що для відшукування пунктів можна використовувати не тільки прив’язування цих пунктів до предметів місцевості, але й прив’язування до пунктів тріангуляції чи полігонометрії старших класів.



Відновлення пунктів

Відшукування пунктів за прив'язками до інших пунктів геодезичних мереж використовуються найчастіше для *поновлення пунктів* полігонометрії. Якщо, наприклад, було виконане прив'язування пункту *P* до пунктів тріангуляції T_1, T_2 та T_3 розв'язком задачі про четверту точку (задачі Потенота), то для відшукування втраченого пункту потрібно, ставши на місцевості там, де очікується положення цього пункту (наприклад, в точці *M*), визначити точки *M*, користуючись пунктами тріангуляції T_1, T_2, T_3.



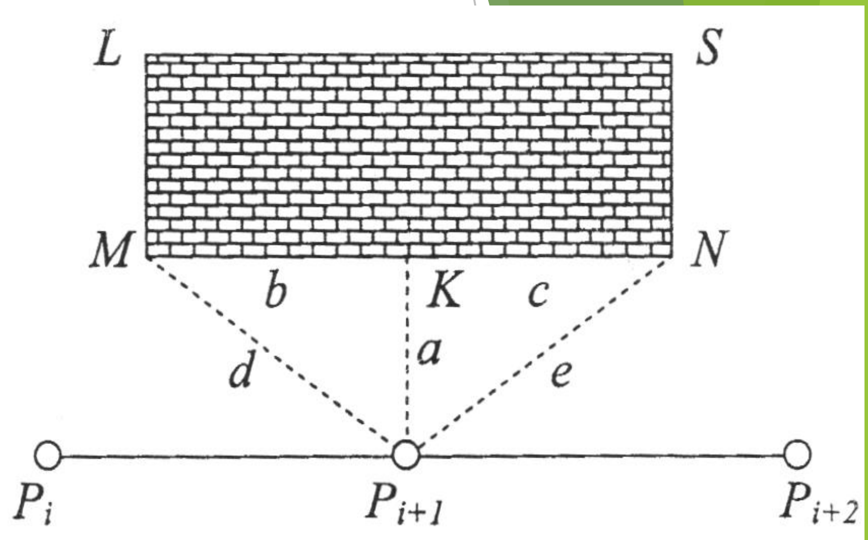
Тепер, знаючи координати точки *M* і координати точки *P*, ми можемо поновити точку *P*. Для цього за координатами обчислюються довжина та напрямок лінії *MP*. Далі, знаючи дирекційний кут лінії (MT_3), обчислюють кут η за формулою:

$$\eta = \alpha_{(MP)} - \alpha_{(MT_3)}$$

Додамо кут *η* до відліку лімба теодоліта, який встановлено в точці *M* і труба якого наведена на точку T_3, отримаємо новий відлік, який необхідно встановити на лімбі, відкріпивши алідаду і повертаючи трубу в горизонтальній площині. Далі, користуючись вертикальною ниткою сітки, виставляють віху у напрямку візирної осі труби. Залишається за цим напрямком відкласти довжину обчисленої лінії *MP* і місце точки *P* на місцевості буде знайдено.

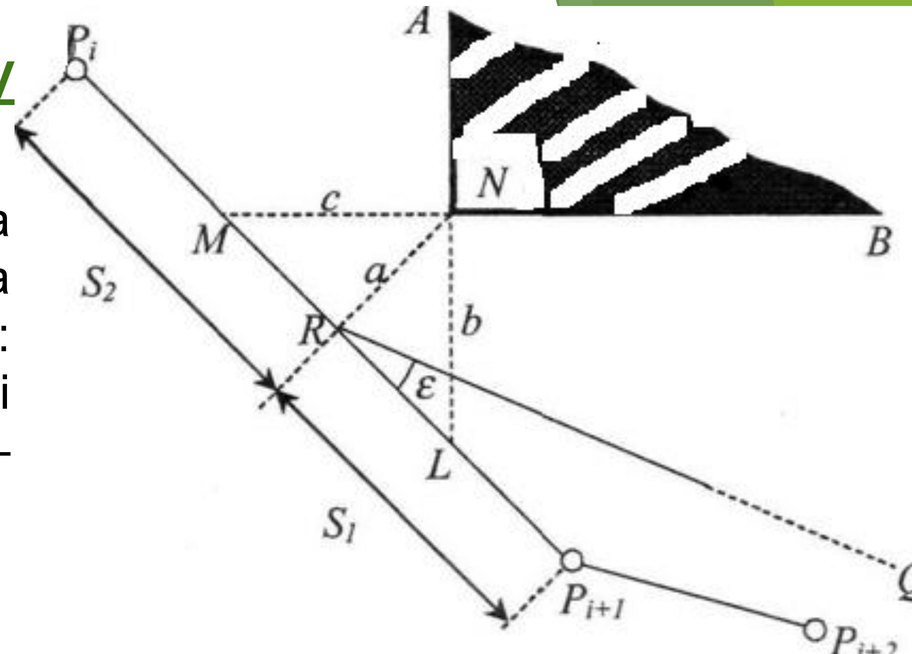
Прив’язування до фасадів будинків

Якщо полігонометричний хід проходить біля постійних предметів, тоді прив’язування виконують переважно лінійними вимірюваннями – рулетками. Наприклад, якщо маємо ***LMNS*** – цегляну або кам’яну споруду (будинок), а точка ходу P_{i+1} розташована біля стіни ***MN***, тоді доцільно опустити на лінію ***MN*** фасаду перпендикуляр з точки P_{i+1} та виміряти довжину перпендикуляра *a*. Крім того, доцільно виміряти віддалі *b* і *c*, від основи перпендикуляра, тобто від точки ***К***, до кутів будинку. Цих вимірів достатньо, щоб знайти точку P_{i+1}, але безконтрольно.



Прив’язування слід виконувати так, щоб обов’язково був контроль. Тому необхідно ще виміряти віддалі *d* та *e* від кутів будинку ***M*** та ***N*** до точки P_{i+1}. Тепер точку P_{i+1} можна знайти з контролем лінійними засічками, використовуючи довжини *a* і *d* та *e*.

Прив’язування до кута будинку



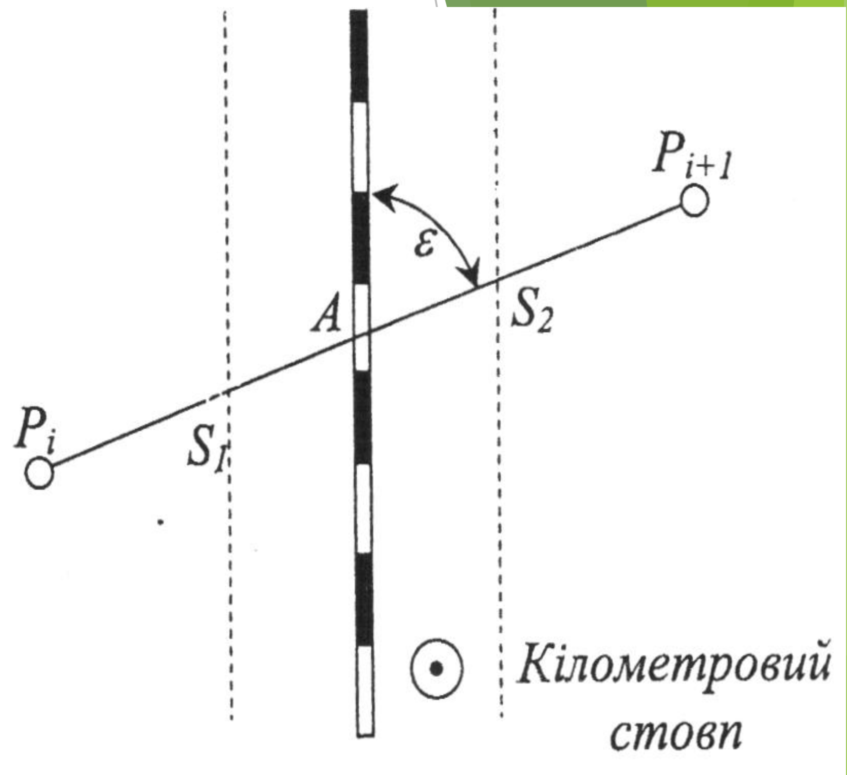
Якщо хід проходить біля кута будинку, то прив’язування можна виконувати **методом створів,** а саме: продовження стіни ***AN*** дає на стороні ходу точку ***L***, а продовження стіни *BN*– точку *M*.

Крім того, потрібно з точки *N* опустити, за допомогою екера, перпендикуляр на цю ж лінію ходу. Точки *M*, *R* та *L* необхідно зафіксувати. Для цього слід виміряти відрізки *c, a, b*, а також частини S_1 та S_2 сторони ходу P_i – P_{i+1}. Цих даних достатньо, щоб з контролем, за необхідністю, відновити положення точок *M, L* та *R*. Якщо ж продовжити створ відрізка *ML*, то зможемо знайти точки P_i та P_{i+1}. Для точнішого встановлення напрямку сторони полігонометричного ходу корисно виміряти на одній з точок *M*, *R* або *L* кут *ε* між напрямком сторони ходу та напрямком на віддалений, стійкий предмет *Q*. Оскільки дирекційний кут лінії P_i та P_{i+1} відомий, тоді буде відомий і дирекційний кут лінії *RQ* та *RN*. Таким чином в результаті прив’язувальних вимірювань можна отримати на місцевості координати додаткових точок *R* та *N*. Це може виявитись корисним, наприклад, під час поновлення пунктів P_i та P_{i+1}.

Прив'язування до залізниці

Якщо полігонометричний хід перетинає залізницю, слід на осі дороги визначити точку *A* – перетин осі з лінією ходу; виміряти віддалі S_1 та S_2 вісь цієї точки до початку та кінця лінії, а також виміряти кут ε між напрямком лінії та осі залізниці та виміряти віддаль від точки *A* до найближчого кілометрового стовпа, ліворуч чи праворуч, відносно лінії $P_i – P_{i+1}$.

Контролями прив'язувальних вимірювань в цьому випадку, є те, що сума $S_1 + S_2$ повинна дорівнювати довжині сторони ходу $P_i – P_{i+1}$. Відома також віддаль до наступного кілометрового стовпа.

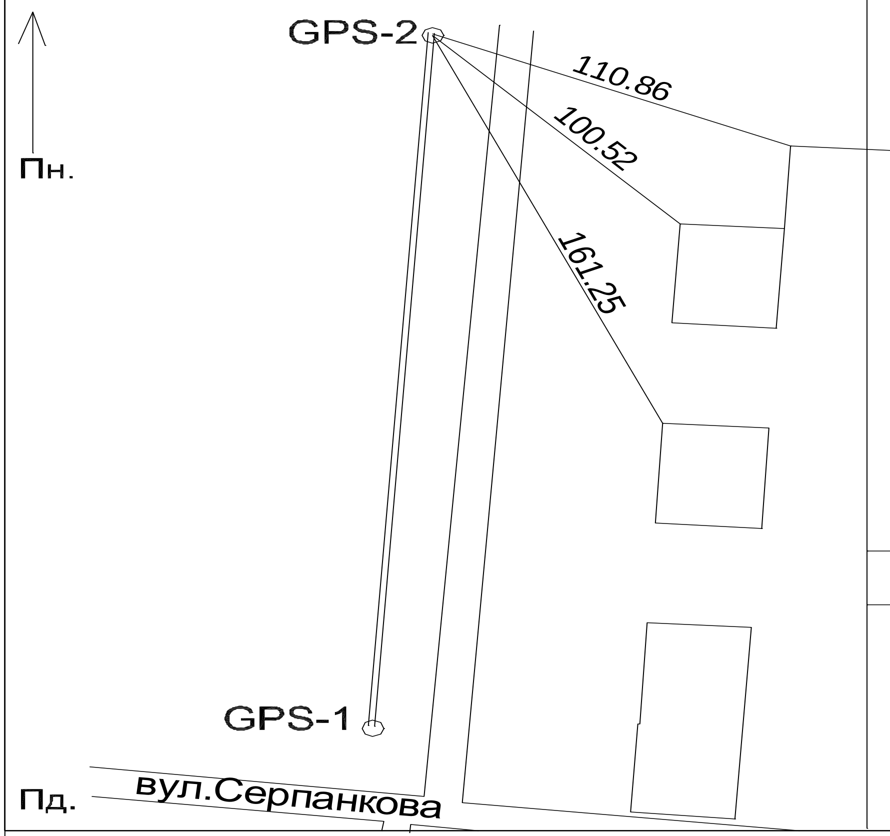
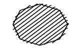
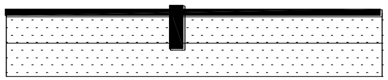


КРОКИ

прив'язки точок планово-висотної мережі

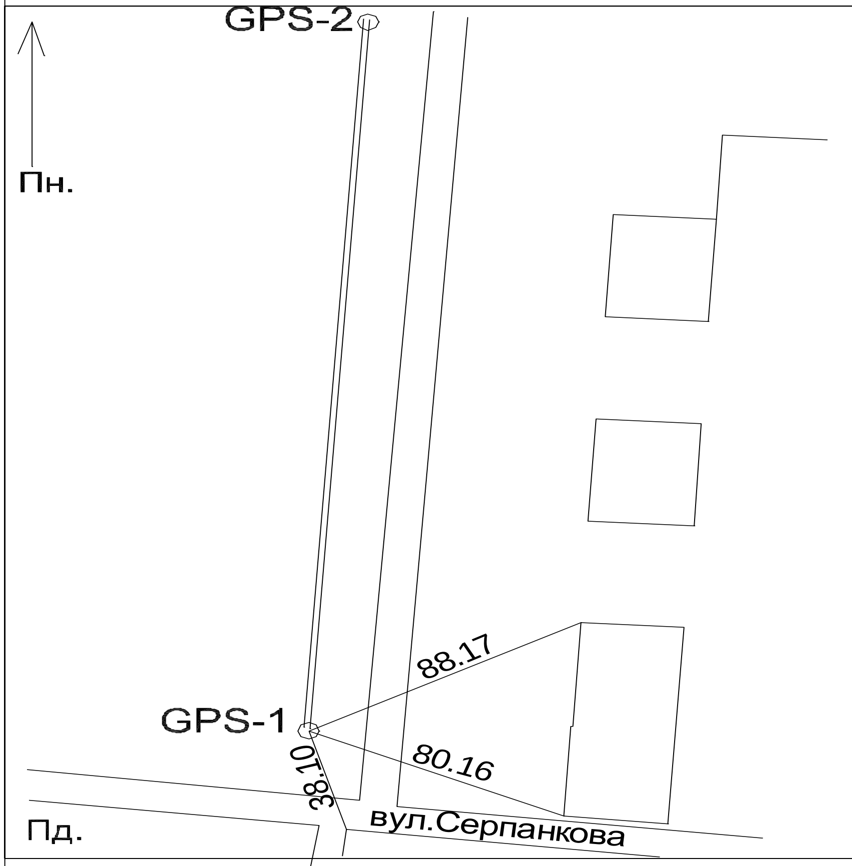
пункт точка тривалого зберігання

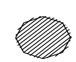
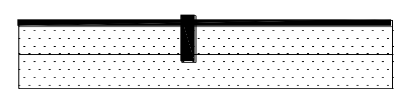
точка GPS-2

<table>
<tr><th>Схема місцезнаходження пункту</th><th colspan="2">Опис місцезнаходження пункту</th></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td colspan="2">Точка тривалого зберігання GPS-2 розташована в м.Рівному, поблизу вул.Серпанкової GPS точка 2 забитий дерев'яний кілок з прив'язкою до твердих контурів на місцевості та має видимість на точку GPS-1</td></tr>
<tr><td>Зовнішній знак</td><td>Розріз центра</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Склав сертифікований
інженер-землевпорядник:</td></tr>
</table>

КРОКИ

прив'язки точок планово-висотної мережі
пункт точка тривалого зберігання
точка GPS-1

Схема місцезнаходження пункту	Опис місцезнаходження пункту
	Точка тривалого зберігання GPS-1 розташована в м.Рівному, поблизу вул.Серпанкової GPS точка 1 забитий дерев'яний кілок з прив'язкою до твердих контурів на місцевості та має видимість на точку GPS-2

Зовнішній знак	Розріз центра
	

Склав сертифікований
інженер-землевпорядник:

Дякую за увагу ☺